

清大數學 100 年入學筆試

SECJMY

第一部分

- (1) 設 $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$
- (a) 請找出領導係數為 1 的有理係數多項式，使得 $f(\alpha) = 0$ 。
- (b) 求 $\alpha^6 - 5\alpha^5 - 5\alpha^3 - 2\alpha^2 + 7\alpha + 3$ 。
- (2) 若有個三角形的三邊長滿足 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ ，證明此三角形有一個角為 60 度。
- (3) 有一拋物線與一正三角形的其中兩邊相切，若此正三角形的邊長為 1，求拋物線焦距。
- (4)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y + z = 17 \\ x^2 + y^2 + z^2 = k \end{cases}$$
，此方程組恰有一組解，求 k 。
- (5) 有一個四面體 $ABCD$ ， $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 5$ ， $\overline{CD} = 6$ ，設 $\overline{AB} = x$
- (a) 求 x 的範圍。
- (b) 求此四面體的體積最大值。
- (6) 有一等差數列 a_1, a_2, \dots, a_{51} 滿足 $\sum_{n=1}^{51} a_n = -51$ ， $\sum_{n=1}^{51} a_n^2 = 493$ ，求公差。
- (7) 有一個四位數 $a_1a_2a_3a_4$ ， a_1a_2 是偶數， $a_1a_2a_3$ 是 3 的倍數， $a_1a_2a_3a_4$ 可被 4 整除，則 $a_1a_2a_3a_4$ 有幾種可能？

第二部分

- (1) 試證明 $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ 在 n 為任意正整數時恆成立。
- (2) 若 $x \in \mathbb{R}$ ， $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geq 0$ 恆成立，求 a 的範圍。
- (3) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ，求 A^n
- (b) 有兩數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}b_n$ ， $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ ，請用 n 表示 a_n 和 b_n ，並求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。
- (4) 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $2^x 3^y 5^z$ 的最大值。
- (5) 一點 $(0, \frac{3}{2})$ ，一曲線 $8y = x^4$ ，求點到曲線的最短距離。
- (6) 甲乙輪流擲骰子，擲出的點數累加到 k (k 從 0 開始)，先讓 k 成為 7 的倍數的人獲勝，求先擲的人獲勝的機率。
- (7) $p^2 + 3q^2 = 11907$ ，求 p, q 的整數解。