清大數學 **104** 年入學筆試

SECJMY

第一部分

(1) 有一數列 $\{a_n\}$, 其中

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},\ n \geq 4 \end{cases}$$

證明: 對任意正整數 n, 都有 $a_n < 2^n$。

(2) 已知 $c_0 + c_1 + c_2 = 0$。證明

$$\lim_{n\to\infty} c_0\sqrt{n} + c_1\sqrt{n+1} + c_2\sqrt{n+2} = 0$$

(3) 有一圓 $O : (x-11)^2 + (y-5)^2 = 13^2$, 求圓 O 在第一象限的面積。

(4) 在空間中一平面 E 過 $(2,3,4)$, 且其法向量爲 (a,b,c)。試求 E 和 xy, yz, xz 平面所圍的最小四面體體積。

(5) 有一直線 L 和 $y = x^4 - 2x^2 + x$ 相切於兩相異點 A, B, 試求出 L 的方程式並證明其唯一性。

(6) 求 $x+y+z = 23$ 的非負整數解有幾組, 並求 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ 的最小值 ((x,y,z) 爲符合 $x+y+z=23$ 的非負整數解)。

(7) (a) 在平面中有一點 P 位於 x 軸上, 且 $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, 求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值

(b) 空間中有兩點 $A = (?,?,?)$, $B = (?,?,?)$, 一直線 $L : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$, 一點 P 在 L 上。求當 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 達到最小時，P 的坐標。

第二部分

(1) 空間中有 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 三向量, 其中 $|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{2}$, $|\vec{w}| = 1$。又 $\vec{u}, \vec{v}$ 夾角爲 $120°$, $\vec{v}, \vec{w}$ 夾角爲 $135°$, $\vec{u}, \vec{w}$ 夾角爲 $90°$。試求 $\vec{u} + 2\vec{v} + 2\vec{w}$ 和 $\vec{v}$ 的夾角的正切值。

(2) 求實數 k 使得 $\log(kx) = 2\log(x+1)$ 恰有一實數解。

(3) $f(x)$ 爲一整係數多項式, 且 $f(0) = 3$, $f(1) = 11$。證明: $f(x) = 0$ 無整數解。

(4) 在一個邊長爲 1 的正方形 $ABCD$ 中, 作一點 P 在 $\overline{AB}$ 上, 作一點 Q 在 $\overline{AD}$ 上, 且使三角形 AQP 的周長恆爲 2。證明: $\angle QCP$ 恆爲 $45°$。

(5) 平面上有一拋物線 $y = x^2 - \frac{3}{4}$, 作一圓使其圓心在拋物線上且圓全部在 x 軸下方, 令集合 C 爲這個圓上的點。令 S 爲所有滿足條件的集合 C 的聯集。證明: $S = \{(x,y) : x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 < 1 \text{ 且 } y < 0\}$。

(6) 一袋中有十顆黑球, 遊戲開始時隨機由袋中取兩顆球, 並另外放入兩顆白球, 上述步驟稱爲一次操作。令 E_n 爲操作 n 次後袋中的白球數期望值。試求 E_n 和 $\lim_{n\to\infty} E_n$。

(7) A 爲一個 2×2 矩陣, 且 $A^3 + A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} A$ 是否成立?

(b) A 是否有反矩陣?